

Representation of finite connectivity spaces

Stéphane DUGOWSON*

1^{er} février 2008

ABSTRACT — After recalling the definition of connectivity spaces and some of their main properties, a way is proposed to represent finite connectivity spaces by directed simple graphs. Then a connectivity structure is associated to each tame link. It is showed that all spaces of a certain class (the iterated Brunnian ones) admit representations by links. Finally, I conjecture that every finite connectivity space is representable by a link.

RÉSUMÉ — Représentation des espaces connectifs finis — Après avoir rappelé la définition des espaces connectifs et certaines de leurs principales propriétés, nous proposons une façon de représenter les espaces connectifs finis par des graphes simples orientés, puis nous associons à tout entrelacs une structure connective. Nous montrons que tout espace d'une certaine classe (les espaces brunniens itérés) admet une représentation par entrelacs, et nous conjecturons finalement que tout espace connectif fini est représentable par entrelacs.

KEYWORDS — Connectivity space. Graph. Link. Borromean. Brunnian. Conjecture.

MOTS CLÉS — Espace connectif. Graphe. Entrelacs. Borroméen. Brunnien. Conjecture.

MSC 2000 — 57M25, 54A05.

*Il est remarquable qu'une figure aussi simple
que celle du nœud borroméen n'ait pas servi de
départ à – une topologie*

Jacques Lacan [1]

Introduction

À notre connaissance, la notion d'espace connectif a d'abord été introduite en 1981 par Börger [2, 3], dans le cadre de la théorie des catégories. Elle a été redécouverte, de façon indépendante, en 1988 par Matheron et Serra [4] dans le cadre de leurs recherches en morphologie mathématique, puis par nous-même en 2003 [5, 6], à partir d'une réflexion sur la nature topologique du jeu de go.

*Stéphane DUGOWSON, dugowson@ext.jussieu.fr.

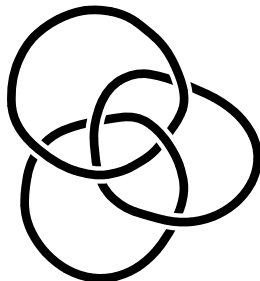


FIG. 1 – Entrelacs borroméen

Or, l'une des structures connectives parmi les plus simples, si elle n'est pas celle d'un espace topologique ni celle d'un graphe, présente une analogie évidente avec l'entrelacs borroméen (figure 1). Dans cet article, nous nous proposons de donner une forme mathématique précise à cette analogie en associant à tout entrelacs un espace connectif fini (section 3). Nous montrons alors que toutes les structures connectives que nous appelons *brunniennes itérées* sont associées à des entrelacs, et nous conjecturons finalement (section 3.1) que toute structure connective finie est celle d'un entrelacs.

Auparavant, afin de disposer d'outils permettant une description aussi simple que possible des espaces connectifs, nous introduisons dans la section 2 les notions de *partie connexe irréductible* (section 2.1), de *graphe générique* (section 2.2), et de *familles connectivement libres* de parties d'un ensemble (section 2.3). Nous signalons aussi certains résultats quant au dénombrement des espaces connectifs finis ayant au plus six points, notamment ceux obtenus en 2002 par Wim van Dam [7, 8] qui donne en particulier lieu à une suite de nombres premiers dont les cinq premiers termes — les seuls connus à ce jour — présentent une progression très rapide [9].

La section 1 rappelle la définition de la catégorie des espaces connectifs et ses principales propriétés.

L'article est illustré par plusieurs figures. Toutes les représentations d'entrelacs ont été produites à l'aide du logiciel *KnotPlot* de Robert G. Scharein [10].

Notations utilisées. Pour tout ensemble X , on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X , et $\text{card}(X)$ le cardinal de X . On note X_n l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Etant donné un ensemble \mathcal{K} de parties d'un ensemble X , on notera \mathcal{K}^* l'ensemble de ces parties ayant au moins deux éléments : $\mathcal{K}^* = \{K \in \mathcal{K}, \text{card}(K) > 1\}$. Pour tout ensemble X , on pose $\mathcal{T}(X) = \mathcal{P}(X)^*$. Les symboles d'inclusion \subset et \supset sont pris au sens large.

1 Rappels sur les espaces connectifs

Définition 1 (Espaces connectifs) *Un espace connectif est un couple $\mathbf{X} = (X, \mathcal{K})$ formé d'un ensemble X et d'un ensemble \mathcal{K} de parties non vides de X tel que*

$$\forall \mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathcal{K}), \bigcap_{K \in \mathcal{I}} K \neq \emptyset \implies \bigcup_{K \in \mathcal{I}} K \in \mathcal{K}.$$

L'ensemble X est le support de \mathbf{X} , l'ensemble \mathcal{K} est une structure connective sur X et ses éléments sont les parties connexes ou parties connectées de l'espace connectif \mathbf{X} . Nous dirons d'un espace connectif qu'il est intègre si tout singleton est connecté. Un morphisme connectif, ou application connective, d'un espace connectif (X, \mathcal{K}) vers un autre (Y, \mathcal{L}) est une application $f : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\forall K \in \mathcal{K}, f(K) \in \mathcal{L}.$$

Dans la suite de cet article, tous les espaces connectifs considérés seront supposés intègres. Pour un tel espace (X, \mathcal{K}) , X est entièrement déterminé par la donnée de \mathcal{K} , puisque $X = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$, tandis que \mathcal{K} est déterminé par la donnée de X et de \mathcal{K}^* , puisque $\mathcal{K} = \bigcup_{x \in X} \{\{x\}\} \cup \mathcal{K}^*$.

Théorème 1 (Composantes connexes) *Pour tout espace connectif (intègre) non vide, les composantes connexes, c'est-à-dire les parties connexes maximales, forment une partition.*

Démonstration. L'espace étant intègre, tout point appartient à une partie connexe maximale, à savoir l'union des connexes qui contiennent ce point. De plus, les parties connexes maximales sont trivialement deux à deux disjointes.

□

Proposition 2 *Ordonné par l'inclusion, l'ensemble $\mathbf{K}(X)$ des structures connectives (intègres) sur un ensemble donné de points X constitue un treillis complet.*

La catégorie des espaces connectifs intègres constitue en fait ce que nous avons appelé une catégorie à treillis de structures [6], de sorte qu'elle admet toutes limites et colimites. C'est une catégorie topologique, non cartésienne fermée [3] mais monoïdale fermée [5, 11, 6].

De la proposition précédente, il découle que tout ensemble \mathcal{A} de parties de X est contenue dans une plus petite (plus fine) structure connective (intègre) $[\mathcal{A}]$ sur X . Le théorème suivant (dans lequel ω_0 désigne le plus petit ordinal infini) conduit à appeler $[\mathcal{A}]$ la structure connective (intègre) engendrée par \mathcal{A} .

Théorème 3 (Engendrement des structures connectives) *Soit X un ensemble, et \mathcal{A}_0 un ensemble de parties de X . Il existe un ordinal α_0 inférieur ou égal à $\omega_0 + 1$ tel que*

$$[\mathcal{A}_0] = \Psi^{\alpha_0}(\mathcal{A}_0),$$

où, pour tout ordinal $\alpha \geq 1$, Ψ^α est l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ dans lui-même définie par induction pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ par

- $\Psi^1(\mathcal{A}) = \Psi(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{P}(X), \exists \mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}, \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \neq \emptyset \text{ et } A = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L\}.$
- Si $\alpha = \beta + 1$, $\Psi^\alpha = \Psi \circ \Psi^\beta$,
- Si α est un ordinal limite, $\Psi^\alpha(\mathcal{A}) = \bigcup_{\beta < \alpha} \Psi^\beta(\mathcal{A})$.

Démonstration. Voir [5], p. 11 - 13.

□

Définition 2 L'union brunnienne $\biguplus_i \mathbf{Y}_i$ d'une famille non vide $\mathbf{Y}_i = (Y_i, \mathcal{K}_i)$ d'espaces connectifs non vides est l'espace connectif $\mathbf{X} = (X, \mathcal{K})$ de support $X = \bigsqcup_i Y_i$ (union disjointe des supports Y_i), et dont la structure connective est obtenue en ajoutant aux connexes des \mathbf{Y}_i la partie pleine du nouvel espace : $\mathcal{K} = \bigsqcup_i \mathcal{K}_i \cup \{X\}$.

Définition 3 Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle espace brunnien à n points l'union brunnienne de n espaces réduits à un point. On appelle en particulier espace borroméen l'espace brunnien à trois points. On appelle structure brunnienne (resp. borroméenne) la structure connective de ces espaces.

Ainsi, l'espace brunnien à n points est l'espace dont le support X comporte n points et dont la structure connective est la structure brunnienne \mathcal{K} caractérisée par $\mathcal{K}^* = \{X\}$.

Espaces brunniens itérés. On définit par récurrence les espaces brunniens d'ordre $r \in \mathbf{N}$: un espace brunnien d'ordre 0 est un espace réduit à un point ; pour tout r , un espace brunnien d'ordre $r + 1$ est l'union brunnienne d'un espace brunnien d'ordre r et d'un ou plusieurs autres espaces brunniens d'ordres inférieurs ou égaux à r .

2 Représentation par graphes simples orientés

2.1 Espaces connectifs irréductibles

Définition 4 Une partie connexe R d'un espace connectif est dite réductible si elle est l'union de deux parties propres connexes d'intersection non vide :

$$R \text{ réductible} \Leftrightarrow \exists (K_1, K_2) \in \mathcal{K}^2, (\forall i \in \{1, 2\}, K_i \subsetneq R) \text{ et } (K_1 \cap K_2 \neq \emptyset).$$

Une partie connexe non réductible est dite irréductible. Un espace connectif est dit irréductible si son support est un connexe irréductible.

Proposition 4 Un espace connectif avec au moins deux points est irréductible si et seulement s'il est l'union brunnienne de certains de ses sous-espaces propres.

Démonstration. Toute union brunnienne est clairement irréductible. Réciproquement, soit (X, \mathcal{K}) un espace connectif irréductible tel que $\text{card}(X) \geq 2$. Alors $(X, \mathcal{K} \setminus \{X\})$ est encore un espace connectif, dont les composantes connexes ont pour union brunnienne (X, \mathcal{K}) .

□

2.2 Graphe générique d'un espace connectif

A tout espace connectif intègre $\mathbf{X} = (X, \mathcal{K})$, on associe un graphe simple orienté $\mathbf{G}_{\mathcal{K}} = (G_{\mathcal{K}}, \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$ de la façon suivante. L'ensemble $G_{\mathcal{K}}$ des sommets de $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ est constitué des parties connexes irréductibles de \mathbf{X} , y compris les singletons. Les éléments de $G_{\mathcal{K}}$ seront également appelés *points génériques* de \mathbf{X} . L'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ des arêtes orientées de $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ est formé des couples de points génériques distincts (a, b) tels que $a \supset b$ et qu'il n'existe pas de point générique c distinct de a et de b tel que $a \supset c \supset b$.

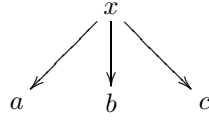


FIG. 2 – Graphe générique de l'espace connectif borroméen

Définition 5 *Le graphe simple orienté $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ est le graphe générique de l'espace connectif \mathbf{X} .*

Proposition 5 *Tout espace connectif (intègre) fini (X, \mathcal{K}) est caractérisé par son graphe générique $(G_{\mathcal{K}}, A_{\mathcal{K}})$.*

Remarque. L'hypothèse de finitude est essentielle. Par exemple, la droite numérique usuelle n'admet que les singletons pour parties connexes irréductibles, et sa structure connective n'en est pas moins distincte de la structure connective discrète (*i.e.* la plus fine, pour laquelle les seuls connexes sont les singletons).

Démonstration. Soit (X, \mathcal{K}) un espace connectif intègre fini. On a $X = \bigcup_{u \in G_{\mathcal{K}}} u$. Par ailleurs, on vérifie par récurrence sur le cardinal (fini) des parties considérées que toute partie connexe de X est l'union des parties connexes irréductibles qu'elle contient, de sorte que $\mathcal{K} = [G_{\mathcal{K}}]$.

□

Exemples. 1. L'espace borroméen à trois points a, b, c admet quatre points génériques, trois qui s'identifient aux points de l'espace, et un quatrième, disons x , qui s'identifie à l'espace entier. Son graphe générique est donc représenté par la figure 2.

2. L'espace connectif défini par

$$X = \{a, b, c, d\} \text{ et } \mathcal{K}^* = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\},$$

a un graphe générique $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ qui comporte, outre les quatre singletons et le point générique x de l'espace, deux points génériques, disons u et v , s'identifiant respectivement aux connexes irréductibles $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$. Notons que b, u, v et x forment un cycle du graphe considéré, qui n'est donc pas un arbre.

Proposition 6 *Un espace connectif fini est un espace brunnien itéré si et seulement si son graphe générique est un arbre ; de plus l'ordre du premier coïncide alors avec la hauteur du second.*

Démonstration. Le sens direct se vérifie par récurrence sur l'ordre des espaces brunniens itérés, la réciproque par récurrence sur la hauteur des arbres.

□

Remarque. Si le graphe générique d'un espace connectif est un arbre, tout nœud de celui-ci a au moins deux fils.

La notion d'ordre d'un espace brunnien itéré s'étend à tout espace connectif fini \mathbf{X} . Pour cela, on commence par définir par récurrence l'ordre des points génériques de \mathbf{X} : les points d'ordre 0 sont ceux qui ne constituent l'origine d'aucune arête du graphe générique, autrement dit ce sont les singletons de X ; pour tout n , un point générique u est d'ordre $n + 1$ si et seulement si n est l'ordre maximal des extrémités v des arcs ayant ce point pour origine.

Définition 6 *L'ordre d'un espace connectif fini est l'ordre maximal de ses points génériques.*

2.3 Familles connectivement libres

Définition 7 *On dit qu'un ensemble de parties $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{T}(X))$ est (connectivement) libre si pour tout $K \in \mathcal{L}$, K est un connexe irréductible de l'espace connectif $(X, [\mathcal{L}])$.*

Cette définition, qui s'étend immédiatement aux familles de parties, signifie intuitivement que dans une famille libre la connexité de certaines parties n'entraîne pas celle des autres. Dans la suite, on note $\mathbf{F}(X) = \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{T}(X)), \mathcal{L} \text{ est libre}\}$. Les propositions suivantes découlent immédiatement des considérations précédentes.

Proposition 7 *Si $\mathcal{L} \in \mathbf{F}(X)$ et si $A \in \mathcal{T}(X) \setminus [\mathcal{L}]$, alors $\mathcal{L} \cup \{A\} \in \mathbf{F}(X)$.*

Proposition 8 *Si X est un ensemble fini, l'application $\mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{F}(X)$ définie par $\mathcal{K} \mapsto G_{\mathcal{K}}^*$ est une bijection, de réciproque $\mathcal{L} \mapsto [\mathcal{L}]$.*

2.4 Énumération des espaces connectifs finis

On se propose maintenant de décrire rapidement un procédé d'énumération de l'ensemble des structures connectives (intègres) de support l'ensemble fini $X_n = \{1, \dots, n\}$. D'après la proposition précédente, cette énumération est équivalente à celle de l'ensemble $\mathbf{F}(X_n)$. Commençons par munir l'ensemble fini $\mathcal{T}(X_n)$ d'une relation d'ordre totale, par exemple la relation \preceq définie en posant, pour tout $L \in \mathcal{T}(X_n)$, $\delta(L) = \sum_{k \in L} 2^k$ et, pour tout couple (L_1, L_2) de parties de X_n à plus de deux éléments, $L_1 \preceq L_2 \Leftrightarrow \delta(L_1) \leq \delta(L_2)$.

On munit alors l'ensemble $\mathbf{F}(X_n)$ d'une relation d'ordre partielle \preccurlyeq en posant, pour tout couple $(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ d'ensembles libres de parties à au moins deux éléments de X_n ,

$$\mathcal{L} \preccurlyeq \mathcal{K} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L} \subset \mathcal{K} \\ \forall K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}, \forall L \in \mathcal{L}, L \preceq K \end{cases}$$

Lorsque la relation $\mathcal{L} \preccurlyeq \mathcal{K}$ est satisfaite, nous disons que \mathcal{K} complète \mathcal{L} à droite. On considère alors l'application $\Phi : \mathbf{F}(X_n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{F}(X_n))$ qui à tout $\mathcal{L} \in \mathbf{F}(X_n)$ associe l'ensemble des familles libres qui complètent \mathcal{L} à droite : $\Phi(\mathcal{L}) = \{\mathcal{K} \in \mathbf{F}(X_n), \mathcal{L} \preccurlyeq \mathcal{K}\}$. Posant, pour tout $\mathcal{L} \in \mathbf{F}(X_n)$,

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{A \in \mathcal{T}(X_n), \forall L \in \mathcal{L}, L \preceq A\} \setminus [\mathcal{L}],$$

on a

$$\Phi(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}\} \cup \bigcup_{A \in \sigma(\mathcal{L})} \Phi(\mathcal{L} \cup \{A\}).$$

En particulier, lorsque $\sigma(\mathcal{L}) = \emptyset$, on a $\Phi(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}\}$. Ceci fournit alors un procédé récursif d'énumération des ensembles $\Phi(\mathcal{L})$, et en particulier de $\Phi(\emptyset) = \mathbf{F}(X_n)$, donc de $\mathbf{K}(X_n)$.

En utilisant ces idées, nous avons implémenté un programme fondé sur une procédure récursive, et nous avons notamment obtenu les résultats suivants. Notant $s_n = \text{card}(\mathbf{K}(X_n)) = \text{card}(\mathbf{F}(X_n))$ le nombre de structures connectives distinctes sur un ensemble à n éléments étiquetés, $c_n = \text{card}(\{\mathcal{K} \in \mathbf{F}(X_n), X_n \in [\mathcal{K}]\})$ le nombre de ces structures pour lesquelles l'espace entier est lui-même connexe, $f_n = \max_{\mathcal{L} \in \mathbf{F}(X_n)} \text{card}(\mathcal{L})$ le nombre maximal de parties connexes irréductibles non réduites à un point pour un support à n points, on a

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, s_2 = 2, s_3 = 12, s_4 = 420, s_5 = 254076, \\ c_1 &= 1, c_2 = 1, c_3 = 8, c_4 = 378, c_5 = 252000, \\ f_1 &= 0, f_2 = 1, f_3 = 3, f_4 = 6, f_5 = 13. \end{aligned}$$

Remarquons que, pour $n \geq 2$, le nombre $k_n = \text{card}(\{\mathcal{K} \in \mathbf{F}(X_n), X_n \in \mathcal{K}\})$ des structures connectives sur X_n pour lesquelles l'espace entier est un connexe irréductible vérifie $k_n = s_n - c_n$, puisque l'application $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \cup \{X_n\}$ réalise une bijection entre les structures non connexes et les structures irréductiblement connexes.

Le nombre $f_5 = 13$ est par exemple illustré par la structure connective sur X_5 définie par $\mathcal{K} = [\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}]$.

Le site *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* de Neil J. A. Sloane contient en outre la valeur de s_6 , calculée en 2002 par Wim van Dam [7, 8] : $s_6 = 17199454920$. En notant p_n le plus grand facteur premier de s_n , on remarque que l'on obtient une suite de nombres premiers dont les premiers termes croissent rapidement [9] : $p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 7, p_5 = 683, p_6 = 143328791$.

On doit également à Wim van Dam [8] le calcul des premiers termes de la suite, notons-la t_n , donnant le nombre de structures connectives sur X_n à isomorphisme connectif près : $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 6, t_4 = 47, t_5 = 3095, t_6 = 26015236$.

3 Representation par entrelacs

On ne considère dans cet article que les entrelacs apprivoisés (*tame links*). Un entrelacs \tilde{E} à n composantes est la classe d'équivalence par isotopie ambiante d'un plongement E dans \mathbf{R}^3 (ou dans la sphère à trois dimensions S^3) de l'union finie disjointe de n copies, numérotées de 1 à n , du cercle S^1 . C'est aussi la classe d'équivalence de E modulo les homéomorphismes de l'espace entier conservant l'orientation, que nous appellerons simplement les *homéomorphismes ambiants*. Un entrelacs est donc défini par la donnée simultanée de n plongements disjoints du cercle qui constituent les composantes (du représentant E) de l'entrelacs \tilde{E} , que nous noterons E_1, E_2, \dots, E_n . Nous identifions E au n -uplet (E_1, E_2, \dots, E_n) . On note \mathcal{E}_n l'ensemble des entrelacs à n composantes, et $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n$ l'ensemble des entrelacs. Etant donné une partie non vide I

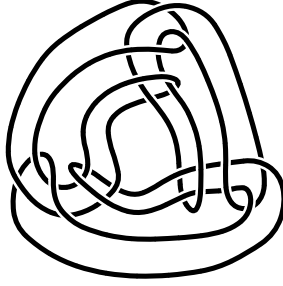


FIG. 3 – Entrelacs de Brunn à trois composantes

de $X_n = \{1, \dots, n\}$, on note \widetilde{E}_I l'entrelacs à $\text{card}(I)$ composantes défini par $E_I = (E_i)_{i \in I}$.

Etant donné un plongement particulier E définissant un entrelacs \widetilde{E} et ϕ un homéomorphisme ambiant, nous noterons simplement $\phi(E) = (\phi(E_i))_{i \in I}$ le plongement composé $\phi \circ E$. Nous dirons que le plongement E est inclus dans une partie T de l'espace pour exprimer l'inclusion $E(\bigsqcup_i S^1) = \bigcup_i E_i(S^1) \subset T$.

Nous dirons qu'un entrelacs $\widetilde{E} \in \mathcal{E}_n$ est *séparable* (*splittable*) s'il existe une partition de X_n en deux ensembles disjoints non vides I et J , un hyperplan (ou, si l'on travaille dans S^3 , une sphère) H et un homéomorphisme ambiant ϕ de l'espace tels que $\phi(E_I)$ et $\phi(E_J)$ se trouvent de part et d'autre de H . Si l'on peut de la même façon séparer toutes les composantes de E , celui-ci est dit *complètement séparable*. Un entrelacs non séparable sera dit *inséparable*.

Définition 8 (Connectivity space associated to a link) La structure connective d'un entrelacs à n composantes \widetilde{E} est la structure connective de l'espace connectif $(X_n, \mathcal{K}_{\widetilde{E}})$ définie par

$$\mathcal{K}_{\widetilde{E}}^* = \{I \in \mathcal{T}(X_n), \widetilde{E}_I \text{ est inséparable}\}.$$

Nous dirons aussi que $(X_n, \mathcal{K}_{\widetilde{E}})$ est l'espace connectif associé à l'entrelacs \widetilde{E} , ou que l'entrelacs \widetilde{E} représente l'espace connectif $(X_n, \mathcal{K}_{\widetilde{E}})$.

Définition 9 L'ordre connectif d'un entrelacs est l'ordre de l'espace connectif associé.

Exemples. 1. La structure connective d'un nœud quelconque, c'est-à-dire d'un entrelacs ayant une seule composante, est celle de l'espace connectif à un point. 2. En 1892, Hermann Brunn [12] a considéré pour tout $n \geq 1$ l'entrelacs construit selon le même principe que l'entrelacs à trois composantes représenté sur la figure 3. Nous appellerons cet entrelacs l'entrelacs de Brunn à n composantes. En 1961, reprenant l'étude topologique des entrelacs de Brunn, Hans Debrunner [13] a considéré plus généralement ce qu'il a appelé les entrelacs de type brunniens ou plus simplement entrelacs brunniens. En termes connectifs, les entrelacs brunniens sont précisément ceux dont la structure connective est celle que, pour cette raison, nous avons qualifiée de brunnienne (d'ordre 1). L'entrelacs borroméen (figure 1) est distinct de l'entrelacs de Brunn à trois composantes, mais c'est aussi un entrelacs brunnien. Le psychanalyste français

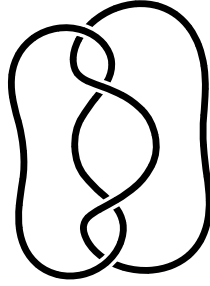


FIG. 4 – Un collier séparable

Jacques Lacan [1] a considéré successivement ces deux entrelacs pour illustrer la borroméanité. Ainsi, de même que la notion de type brunnien introduite par Debrunner, l'idée de borroméanité chez Lacan semble bien être de nature connective. C'est ce qui nous a conduit, dans l'article [6], à poser la définition suivante.

Définition 10 *On appelle espaces connectifs lacaniens les espaces connectifs admettant une représentation par entrelacs.*

Définition 11 *On appelle collier à n composantes tout couple (E, T) , où $T \subset \mathbf{R}^3$ est un tore solide et $E = (E_1, \dots, E_n)$ définit un plongement de l'entrelacs \tilde{E} à l'intérieur de T tel que*

- E n'est pas contenu dans une partie simplement connexe de T ,
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe une partie simplement connexe de T qui contient $(E_j)_{j \neq i}$.

Remarque. Il est équivalent de dire que E constitue une partie *essentielle* de T mais que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(E_j)_{j \neq i}$ est une partie non essentielle de T (sur la notion de partie essentielle, voir [14], p. 110).

Exemples. 1. L'entrelacs formé de deux cercles non entrelacés peut être représenté par un collier (figure 4). Plus généralement, l'entrelacs complètement séparable à n composantes peut être représenté par un collier (voir par exemple, parmi les centaines d'entrelacs de toutes sortes dessinés par le mathématicien Pierre Soury celui du texte 50, page 1 de [15]).

2. Les approximations finies du collier d'Antoine (*Antoine's Necklace*) obtenues à chaque étape de sa construction constituent autant de colliers (finis).

3. L'entrelacs de Brunn à n composantes se représente par un collier (E, T) que nous appellerons le collier de Brunn. Pour $n = 1$, le collier de Brunn se réduit au nœud trivial. Pour $n = 2$, on obtient (après l'action d'un isotopie ambiante adéquate) l'entrelacs représenté sur les figures 6 et 7. Remarquons que le collier de Brunn à deux composantes n'est pas le collier brunnien à deux composantes le plus simple, l'entrelacs nommé 4_1^2 dans la table de Tait étant lui aussi un tel collier (voir les figures 8 et 9).

Soit maintenant F le plongement dans T de n copies du tore solide de référence $T_0 = D^1 \times S^1$ obtenu en remplaçant chaque composante $E_i(S^1)$ du collier de Brunn E par un voisinage tubulaire $F_i(T_0)$ de rayon suffisamment petit. Le plongement F constitue ainsi un entrelacs brunnien de n tores solides ,

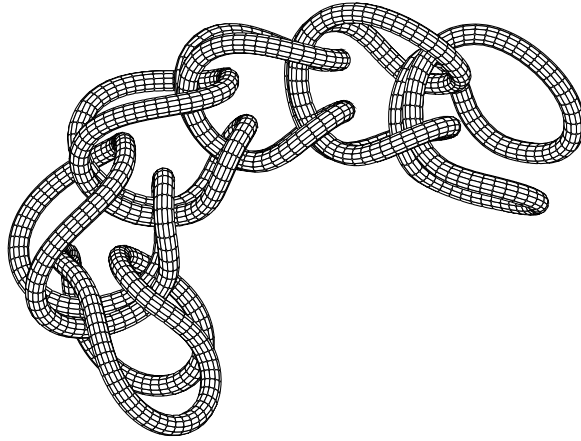


FIG. 5 – Quelques composantes d'un collier de Brunn solide

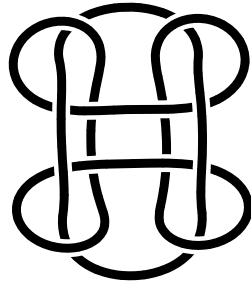


FIG. 6 – Un diagramme du collier de Brunn à deux composantes

que nous appellerons le *collier de Brunn solide* à n composantes (la figure 5 représente quelques composantes formant une partie d'un tel collier).

Dans la suite, A et B désignant deux parties de l'espace, nous dirons que A *tranche* B s'il existe une partie simplement connexe de B contenant $B \setminus A$. Il est immédiat que toute partie de l'espace qui tranche le tore solide dans lequel est inscrit un collier tranche également une composante au moins de ce collier. Nous admettrons que cette propriété continue d'être vérifiée pour les colliers de Brunn *solides* : toute partie de l'espace qui tranche le tore solide dans lequel est inscrit un collier de Brunn solide tranche également une composante au moins de ce collier.

Théorème 9 *L'union brunniennne d'une famille finie d'espaces connectifs finis représentables par des colliers est elle-même représentable par un collier. En particulier, les espaces brunniens itérés sont lacaniens.*

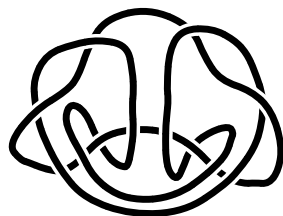


FIG. 7 – Collier de Brunn à deux composantes

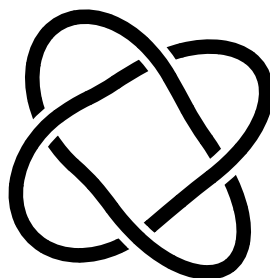


FIG. 8 – Diagramme standard de 4_1^2

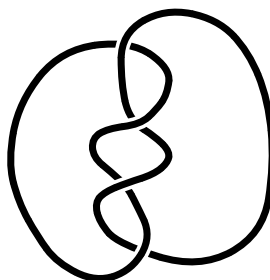


FIG. 9 – Vue en collier de 4_1^2

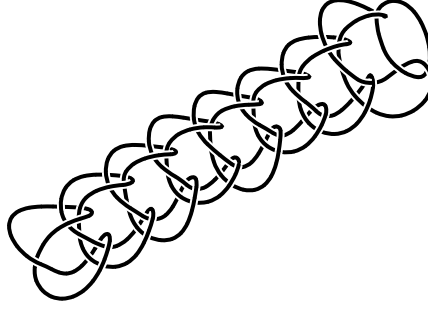


FIG. 10 – Un entrelacs d'ordre 8

Démonstration. Soit $(\mathbf{X}_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p espaces connectifs finis, chacun d'eux étant représentable par un collier (E^i, T_i) , avec $E^i = (E_1^i, \dots, E_{n_i}^i)$, où n_i est le nombre de points de l'espace \mathbf{X}^i . On peut choisir chaque tore solide T_i de façon à ce qu'il coïncide avec la i -ème composante d'un collier de Brunn solide à p composantes inscrit dans un tore solide T . La famille $E = (E_j^i)$ où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n_i$ constitue alors l'entrelacs cherché. En effet, le complémentaire d'une partie simplement connexe V du tore T tranche nécessairement l'un des T_i , donc l'un des (E_j^i) , de sorte que la famille E ne peut être contenue dans une partie simplement connexe de T . De plus, si $(E_{j_0}^{i_0})$ désigne un nœud quelconque composant E , la famille $(E_j^i)_{(i,j) \neq (i_0, j_0)}$ est constituée d'une part des entrelacs E^i pour $i \neq i_0$ et d'autre part des $E_j^{i_0}$ pour $j \neq j_0$. Les entrelacs considérés étant brunnien, on peut alors déplacer par isotopie ambiante ces différentes composantes de façon à mettre en évidence leur inclusion dans une partie simplement connexe du tore solide T . Ainsi, E est bien un collier. Enfin, d'après ce qui précède, les seules sous-familles non vides inséparables de E sont les E^i et E elle-même, de sorte que la structure connective de E est bien celle de $\biguplus_{1 \leq i \leq p} \mathbf{X}_i$. La seconde affirmation en découle immédiatement, par récurrence triviale.

□

Exemples. 1. Un entrelacs à n composantes a un ordre connectif inférieur ou égal à $n - 1$. Voici un exemple où l'ordre maximal est atteint. Soit \mathbf{X} l'espace connectif de support $\{x_1, \dots, x_n\}$ dont le graphe générique comporte, outre les singletons, $n - 1$ points génériques y_1, \dots, y_{n-1} et dont l'ensemble des arêtes est $\mathcal{A} = \{(y_i, y_{i-1}), i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{(y_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n - 1\}$, où on a posé $y_0 = x_1$. \mathbf{X} est un espace brunnien d'ordre $n - 1$, c'est donc un espace lacanien représentable par un entrelacs $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ présentant la propriété suivante : si l'on coupe E_k , la famille (E_1, \dots, E_{k-1}) reste entrelacée tandis que les E_{k+1}, \dots, E_n se séparent les uns des autres. La figure 10 représente un tel entrelacs pour $n = 9$.

2. L'entrelacs de la figure 11 est un borroméen de borroméen, d'ordre connectif égal à 2.

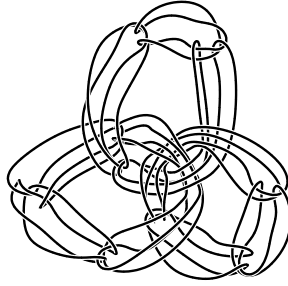


FIG. 11 – Un borroméen de borroméen

3. La structure connective sur $\{a, b, c, a', b', c'\}$ qui admet pour points génériques $u = \{a, b\}$, $v = \{b, c\}$, $u' = \{a', b'\}$, $v' = \{b', c'\}$ et $x = \{u, v, u', v'\}$ n'est pas brunnienne, mais est facilement représentable par un collier.

3.1 Une conjecture

Conjecture. Tout espace connectif fini est lacanien.

J'ai formulé cette conjecture pour la première fois lors de la conférence [11], puis dans l'article [6].

Références

- [1] Jacques Lacan. *Encore (Séminaire, livre XX : 1973)*. Seuil, Paris, 1975.
- [2] Richard Börger. *Kategorielle Beschreibungen von Zusammenhangsbegriffen*. PhD thesis, Fernuniversität, Hagen, 1981.
- [3] Richard Börger. Connectivity spaces and component categories. In *Categorical topology, International Conference on Categorical Topology (1983)*, Berlin, 1984. Heldermann.
- [4] Georges Matheron and Jean Serra. Strong filters and connectivity. In *Image analysis and Mathematical morphology*, volume 2, pages 141–157. Academic Press, London, 1988.
- [5] Stéphane Dugowson. Espaces connectifs et espaces de partage, 2003. Unpublished.
- [6] Stéphane Dugowson. Les frontières dialectiques. *Mathematics and Social Sciences*, 177 :87–152, 2007. Downloadable on <http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N177R992.pdf>.
- [7] Wim Van Dam. The sequence 1, 2, 12, 420, 254076, 17199454920,... On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (Neil J.A. Sloane), 2002. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A072446>.
- [8] Wim van Dam. Sub power set sequences. Personal web site of the author, 2002. <http://www.cs.ucsb.edu/~vandam/research/spssequences.html>.
- [9] Stéphane Dugowson. The sequence 2, 3, 7, 683, 143328791... On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (Neil J.A. Sloane), 2007. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A129907>.

- [10] Robert G. Scharein. KnotPlot. <http://knotplot.com>.
- [11] Stéphane Dugowson. Attractions borroméennes (séminaire mamuphi, École normale supérieure (Paris), exposé du 27 janvier 2007). Video recording on <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1639>.
- [12] Hermann Brunn. Ueber verkettung. *Sitzungsberichte der Bayerische Akad. Wiss., MathPhys. Klasse*, 22 :77–99, 1892.
- [13] H. Debrunner. Links of Brunnian type. *Duke Math. J.*, 28 :17–23, 1961.
- [14] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Publish or Perish, Inc., Houston, 1990.
- [15] Pierre Soury. *Chaîne et nœuds*, volume 2. M. Thomé et C.Léger, Paris, 1988.

Table des matières

| | | |
|----------|----------------------------------------------------|----------|
| 1 | Rappels sur les espaces connectifs | 2 |
| 2 | Représentation par graphes simples orientés | 4 |
| 2.1 | Espaces connectifs irréductibles | 4 |
| 2.2 | Graphe générique d'un espace connectif | 4 |
| 2.3 | Familles connectivement libres | 6 |
| 2.4 | Enumération des espaces connectifs finis | 6 |
| 3 | Representation par entrelacs | 7 |
| 3.1 | Une conjecture | 13 |